

# Krivolinijski integral

December 3, 2020

# Kriva

**Kriva linija** - krak materijalne tačke koja se kreće.

## Definicija

**Kriva** u prostoru  $\mathbb{R}^n$  je neprekidno preslikavanje  
 $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$

Kriva u ravni ( $\mathbb{R}^2$ ):  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

Kriva u prostoru ( $\mathbb{R}^3$ ):  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

Kriva u  $\mathbb{R}^n$ :  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Neka se tačka  $M$  kreće u prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Neka je u momentu  $t$  položaj tačke  $M$  određen koordinatama  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ . Vektor  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  se naziva **vektorom položaja** tačke  $M$ .

Jednačine  $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$  su **parametarske jednačine krive**.

$t$  je **parametar** krive (može da se interpretira kao vreme, ugao,...).  
Interval  $[a, b]$  je **domen parametra**  $t$ .

**Parametrizacija** krive :

U ravni:  $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$ ,  $\vec{i} = [1, 0]^T$ ,  $\vec{j} = [0, 1]^T$

U prostoru:

$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{i} = [1, 0, 0]^T$ ,  $\vec{j} = [0, 1, 0]^T$ ,  $\vec{k} = [0, 0, 1]^T$

Parametrizacija krive nije jedinstvena. (primer na času).

Kriva  $C$  je uvek **orijentisana**:  $\forall t_1, t_2 \in [a, b], t_1 < t_2$  kriva  $C$  je orijentisana od tačke  $\vec{r}(t_1)$  ka tački  $\vec{r}(t_2)$ .

Specijalno,  $\vec{r}(a)$  je **početak**, a  $\vec{r}(b)$  je **kraj** krive  $C$ .

Ako je  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$  (početak i kraj se poklapaju) onda je  $C$  **zatvorena kriva**.

U slučaju zatvorene krive koristimo pojmove pozitivno i negativno orijentisana kriva.

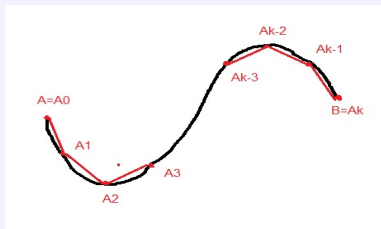
**Pozitivno orijentisana zatvorena kriva** - kada se krecemo po krivoj a unutrašnja oblast ostaje sa leve strane (smer suprotan od kazaljke na satu).

**Negativno orijentisana zatvorena kriva** - kada se krecemo po krivoj a unutrašnja oblast ostaje sa desne strane (smer kazaljke na satu).

Ako postoje tačke takve da za  $t_1 \neq t_2$  važi  $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) = T$  onda je  $T$  **samopresečna tačka** krive (osim u slučaju  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ ).

Ako kriva nema samopreseka onda je ona **prosta** kriva.

## Dužina krive



Neka je

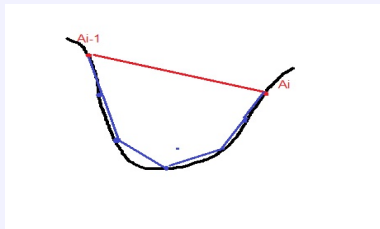
$P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$   
 podela segmenta  $[a, b]$ .

$$A_0 = \vec{r}(t_0), \dots, A_k = \vec{r}(t_k)$$

$r_P$  je **poligonalna linija** čija su temena  $A_0 = \vec{r}(t_0), \dots, A_k = \vec{r}(t_k)$ .  
 Kaže se da je poligonalna linija upisana u krivu.

Dužina duži određene tačkama  $A_{i-1}$  i  $A_i$ :  $\|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\|$ .

**Dužina poligonalne linije**  $r_P$ :  $\ell(r_P) = \sum_{i=1}^k \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\|$ .



Ako svaki deo krive  $\widehat{A_{i-1}A_i}$  izdelimo na još tačaka, dobijamo finiju podelu  $P'$ .

Njoj odgovara poligonalna linija  $r_{P'}$  čija je dužina  $\ell(r_{P'})$ .

Na osnovu nejednakosti trougla  $\Rightarrow \ell(r_P) \leq \ell(r_{P'})$ .

Dakle, finije podele rezultiraju poligonalnim linijama veće dužine.

Kriva može imati konačnu ili beskonačnu dužinu.

Kriva koja ima konačnu dužinu je **rektificijabilna** kriva.

### Definicija

Kriva je **rektificijabilna** (ima konačnu dužinu) ako postoji  $M$ , ( $0 < M < \infty$ ), takvo da  $\sum_{i=1}^k \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| < M$  za svaku podelu  $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  segmenta  $[a, b]$ .

Ako je kriva  $C$  rektificijabilna onda je **dužina krive**  $C$  jednaka

$$\ell(C) = \sup_P \sum_{i=1}^k \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\|.$$



Kriva je **diferencijabilna** akko su sve koordinatne funkcije diferencijabilne.

Za diferencijabilnu vektorsku funkciju  $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  vektor  $(x'_1(t), \dots, x'_n(t))$  zovemo njenim **prvim izvodom** i označavamo  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}' = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$ .

Kriva je **neprekidno diferencijabilna** akko  $\exists \vec{r}'$  i  $\vec{r}'$  je neprekidna funkcija.

Ekvivalentno,  $\vec{r}$  je neprekidno diferencijabilna ako su joj sve koordinatne funkcije neprekidno diferencijabilne.

Tačka krive  $C$  je **singularna tačka krive** ako je  $\vec{r}'(t) = \vec{0}$  (u toj tački postoji dve ili više tangenti na krivu).

Ako je  $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$  za neko  $t \in [a, b]$  onda je sa  $\vec{r}'(t)$  određena **tangenta krive** u tački  $\vec{r}(t)$ .

Tangenta je prava koja prolazi kroz  $\vec{r}(t)$  i čiji je vektor pravca  $\vec{r}'(t)$ .

Kriva je **glatka** ako postoji  $\vec{r}'(t)$ , ako je  $\vec{r}'(t)$  neprekidna na  $[a, b]$  i  $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}, \forall t \in [a, b]$  (nema singularnih tačaka).

Kriva je glatka ako se u svakoj tački te krive može odrediti jedinstvena tangenta.

## Teorema

Neka je  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatka kriva. Tada je  $r$  rektificijabilna kriva i njena dužina je data sa:

$$\ell(r) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + \dots + (x_n'(t))^2} dt.$$

Neka je  $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  proizvoljna podela segmenta  $[a, b]$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt &= \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + \dots + (x_n'(t))^2} dt \\ &= \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \sqrt{\left(\frac{x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_k(t_i) - x_k(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} (t_i - t_{i-1}) \\ &= \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + \dots + (x_k(t_i) - x_k(t_{i-1}))^2} = \ell(r) \end{aligned}$$

## Definicija

Kriva je **deo-po-deo glatka** ako postoji podela

$P : a = S_0 < S_1 < \dots < S_m = b$  segmenta  $[a, b]$  takva da je kriva glatka na svakom od segmenata  $[S_{i-1}, S_i]$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Jedine tačke koje remete neprekidnost "kretanja" tangente su konacno mnogo tačaka  $S_1, \dots, S_{m-1}$ .

Deo-po-deo glatka kriva zove se **putanja**.

## Teorema

*Neka je  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  deo-po-deo glatka kriva. Tada je  $r$  rektificijabilna kriva i njena dužina je data sa:*

*$$\ell(r) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + \dots + (x_n'(t))^2} dt,$$
 pri čemu zanemarujemo konačno mnogo tačaka  $S_i$  u kojima ne postoji prvi izvod  $\vec{r}'(S_i)$ .*

Dokaz:

Dužina krive na  $[a, b]$  jednaka je sumi dužina delova krive na  $[S_{i-1}, S_i]$ .

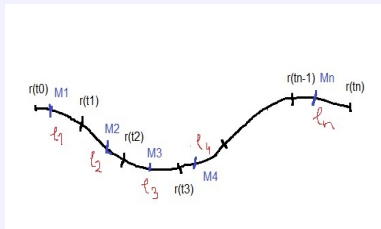
$$\ell(r) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt = \sum_{i=1}^k \int_{S_{i-1}}^{S_i} \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

Pošto je  $r$  glatka na  $[S_{i-1}, S_i]$  (na osnovu prethodne teoreme) ona je i rektificijabilna na  $[S_{i-1}, S_i]$

$\Rightarrow$  ima konačnu dužinu.

## Krivolinijski integral prve vrste

Neka je  $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  proizvoljna podela segmenta  $[a, b]$  kojom je glatka kriva  $C$  sa parametrizacijom  $\vec{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$  podeljena na  $n$  lukova  $I_i$ .



$\Delta I_i$  - dužina luka  $I_i$ .

Neka je  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  (domen je kriva).

Na svakom luku  $I_i$  izaberemo proizvoljnu tačku  $M_i$ .

**Krivolinijski integral** funkcije  $f$  duž glatke krive  $C$  definiše se preko Rimanovih integralnih suma na sledeći način:

$$\int_C f dl = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta I_i.$$

## Teorema

### ***Izračunavanje krivolinijskog integrala prve vrste***

*Ako kriva  $C$  ima deo-po-deo glatku parametrizaciju  $\vec{r}(t)$  na  $[a, b]$  i ako je  $\vec{r}$  neprekidna, onda krivolinijski integral prve vrste neprekidne funkcije  $f(x, y, z)$  duž krive  $C$  postoji i on je jednak:*

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z) dl &= \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt\end{aligned}$$

Specijalno: Ako je  $f \equiv 1$  na  $[a, b]$  onda je dužina krive  $\ell(C) = \int_C f dl$ .

# Svojstva krivolinijskog integrala prve vrste

## Teorema

Neka je  $L$  luk krive između tačaka  $A$  i  $B$ , neka su  $f$  i  $g$  funkcije definisane na luku  $L$  i integrali  $\int_L f(x, y, z)dl$  i  $\int_L g(x, y, z)dl$  postoje.

Tada:

- $\int_L (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z))dl = \alpha \int_L f(x, y, z)dl + \beta \int_L g(x, y, z)dl,$   
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- $\int_{AB} f(x, y, z)dl = \int_{AC} f(x, y, z)dl + \int_{CB} f(x, y, z)dl$   
gde je  $C \in L$  tačka između  $A$  i  $B$ .
- $|\int_L f(x, y, z)dl| \leq \int_L |f(x, y, z)|dl.$
- Ako je  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$  onda je  
 $\int_L f(x, y, z)dl \leq \int_L g(x, y, z)dl.$
- $\int_{AB} f(x, y, z)dl = \int_{BA} f(x, y, z)dl.$



## Krivolinijski integral druge vrste

Neka je kriva  $C$  data parametrizacijom  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Neka su  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  i  $R(x, y, z)$  funkcije definisane i ograničene na  $C$ .

Neka je  $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  podela segmenta  $[a, b]$ .

Izaberimo vrednosti  $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ .

Neka su tačke na krivoj:

$$A_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) = \vec{r}(t_i) \text{ i}$$

$$M_i(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) = \vec{r}(\tau_i)$$

Označimo:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad x_i = x(t_i), \quad x_{i-1} = x(t_{i-1})$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \quad y_i = y(t_i), \quad y_{i-1} = y(t_{i-1})$$

$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1}, \quad z_i = z(t_i), \quad z_{i-1} = z(t_{i-1})$$

Sastavimo Rimanove integralne sume:

$$\mathcal{R}_1(P, C) = \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta x_i$$

$$\mathcal{R}_2(Q, C) = \sum_{i=1}^n Q(M_i) \Delta y_i$$

$$\mathcal{R}_3(R, C) = \sum_{i=1}^n R(M_i) \Delta z_i$$

## Definicija

Ako za funkciju  $P(x, y, z)$  (odnosno  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ ) definisanu i ograničenu na krivoj  $C$ , postoji  $\lim_{\Delta \ell_i \rightarrow 0} \mathcal{R}_1(P, C)$  (odnosno

$\lim_{\Delta \ell_i \rightarrow 0} \mathcal{R}_2(Q, C)$ ,  $\lim_{\Delta \ell_i \rightarrow 0} \mathcal{R}_3(R, C)$ ) onda se on naziva **krivolinijski**

**integral druge vrste** funkcije  $P$  (odnosno  $Q, R$ ) po krivoj  $C$  i označava sa  $\int_C P(x, y, z) dx$  (odnosno  $\int_C Q(x, y, z) dy$ ,  $\int_C R(x, y, z) dz$ ).

## Definicija

Zbir  $\int_C P(x, y, z) dx + \int_C Q(x, y, z) dy + \int_C R(x, y, z) dz$  obično se piše u obliku:  $\int_C (P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz)$  i naziva se **opšti krivolinijski integral druge vrste**.

## Teorema

**Izračunavanje krivolinijskog integrala druge vrste**

Ako kriva  $C$  ima deo-po-deo glatku parametrizaciju  $\vec{r}(t)$  na  $[a, b]$  i  $P(x, y, z)$  je neprekidna, tada važi:

$$\int_C P(x, y, z) dx = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) dt.$$

Analogno i za:

$$\int_C Q(x, y, z) dy = \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) dt.$$

$$\int_C R(x, y, z) dz = \int_a^b R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) dt.$$

Konačno:

$$\int_C (P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz) = \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)) dt$$

## Svojstva krivolinijskog integrala druge vrste

### Teorema

Neka je  $C$  krive između tačaka  $A$  i  $B$ , neka su  $P_1$  i  $P_2$  funkcije definisane na  $C$  i postoje integrali  $\int_C P_1(x, y, z) dx$  i  $\int_C P_2(x, y, z) dx$  postoje. Tada:

- $\int_C (\alpha P_1(x, y, z) + \beta P_2(x, y, z)) dx =$   
 $\alpha \int_C P_1(x, y, z) dx + \beta \int_C P_2(x, y, z) dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- $\int_{AB} P_1(x, y, z) dx = \int_{AM} P_1(x, y, z) dx + \int_{MB} P_1(x, y, z) dx$   
 gde je  $M \in C$  tačka između  $A$  i  $B$ .

## Teorema

*(Ovo svojstvo nema krivolinijski integral prve vrste)*

*Ako postoji  $\int_{AB} P(x, y, z) dx$  onda je*

$$\int_{BA} P(x, y, z) dx = - \int_{AB} P(x, y, z) dx.$$

Smatramo da je luk  $AB$  orijentisan. Oznake:

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx = \int_C P(x, y, z) dx$$

$$\int_{BA} P(x, y, z) dx = \int_{C^-} P(x, y, z) dx$$

Ako je  $C$  zatvorena kriva:  $\oint_C P dx + Q dy + R dz.$

## Nezavisnost integracije od putanje

Krivolinijski integral  $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$  u opštem slučaju zavisi od putanje po kojoj se vrši integracija.

Međutim, nekad to nije tako: Ako izraz  $Pdx + Qdy + Rdz$  predstavlja totalni diferencijal neke funkcije, onda krivolinijski integral po luku  $AB$  zavisi samo od tačaka  $A$  i  $B$ , a ne od luka  $AB$ .

## Teorema

*Sledeća tvrđenja su međusobno ekvivalentna:*

- 1 Postoji funkcija  $F(x, y, z)$  sa neprekidnim parcijalnim izvodima takva da važi:  $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$  i  $\frac{\partial F}{\partial z} = R$ .
- 2 Krivolinijski integral  $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$  po putanji  $AB$  ne zavisi od oblika putanje, nego samo od tačaka  $A$  i  $B$ .  
Ako su  $A = (a_1, a_2, a_3)$  i  $B = (b_1, b_2, b_3)$  onda je vrednost integrala  $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$   

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = F(b_1, b_2, b_3) - F(a_1, a_2, a_3).$$
- 3 Krivolinijski integral  $\oint_C Pdx + Qdy + Rdz$  po proizvoljnoj zatvorenoj putanji  $C$  jednak je 0.



Još jedan kriterijum za raspoznavanje da li je podintegralna funkcija  $Pdx + Qdy + Rdz$  gradijent neke funkcije  $F(x, y, z)$ :

### Definicija

Oblast  $D \subset \mathbb{R}^3$  je **prosto (jednostruko) povezana** ako se svaka zatvorena deo-po-deo glatka kriva  $C \subset D$  može "stegnuti" u proizvoljnu tačku  $M \in C$  ostajući pri tome u  $D$ .

Primeri na času.

### Teorema

Neka je  $D \subset \mathbb{R}^3$  prosto povezana oblast i neka neprekidna funkcija  $F(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, z, y))$  ima neprekidne parcijalne izvode  $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$ . Potreban i dovoljan uslov da integral  $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$  ne zavisi od putanje  $AB$  je da su ispunjene

**jednakosti:**  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z}$ .